

Analiza metrologiczna dawnych budowli w Persepolis

Metody nieinwazyjne we współczesnej praktyce
archeologicznej

Paweł Borycki

8 marca 2016

<http://www.pborycki.pl/pdf/modul5.pdf>

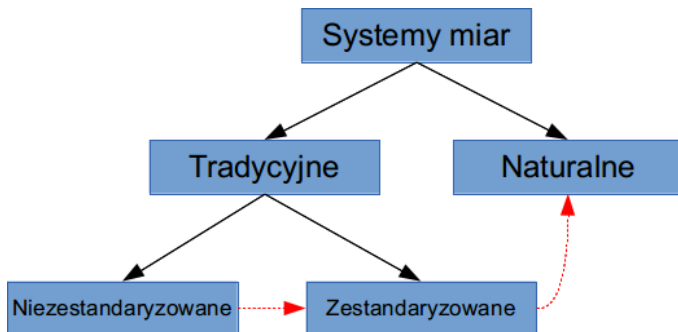
Plan prezentacji

- 1 Długość i jej miara
 - Systemy miar
 - Powiązania z systemem liczbowym
 - Liczby regularne
 - Bliskowschodnie systemy liczbowe
 - Sumeryjsko-babiloński system miar długości
 - Propozycje systemów miar długości dla Persepolis
- 2 Moduł architektoniczny
 - Definicja
 - Metody obliczania
 - Klasy wymiarów architektonicznych
 - Metoda kwantogramu cosinusowego / Zmodyfikowana metoda najmniejszych kwadratów
 - Przykładowe obliczenia
 - Pałac Kserksesa w Persepolis

Fazy rozwoju systemów miar

- Hipoteza **V. Gordona Childe'a** – 3 fazy rozwoju systemów miar
- Wzrost znaczenia rzemiosła i handlu
 - Formalizacja definicji jednostek miar
 - Precyzja pomiaru
- **1. Pomiar poprzez porównanie i decyzję binarną**
 - Produkcja na potrzeby własnego gospodarstwa
 - Brak specjalizacji
 - Np. dopasowanie części narzędzia
- **2. Tradycyjny system miar długości**
 - Jednostki oparte na długości części ciała
 - Długość wyrażana jako liczba jednostek
 - Wymiana towarów między gospodarstwami
- **3. Zestandaryzowany tradycyjny system miar długości**
 - Dokładność i powtarzalność jednostek miar
 - Standaryzacja jednostek dokonywana przez elity
 - Obecność wzorców, np. prętów mierniczych

Podział systemów miar



- Systemy naturalne (np. **metryczny**)
 - Zdefiniowane poprzez stałe fizyczne
- Systemy tradycyjne zestandaryzowane (np. **imperialny**)
 - Zdefiniowane poprzez prawo
- Większe jednostki
 - Wielokrotności mniejszych jednostek
 - Liczby regularne

Liczby regularne

- Pozycyjny system liczbowy o podstawie x
 - $(a_i \dots a_1 a_0)_x = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + \dots + a_i \cdot x^i$
 - $0 \leq a_0 \dots a_i \leq x - 1, a_0 \dots a_i \in \mathbb{N}$
- Okres starobabiloński
 - Sześćdziesiątkowy system liczbowy
 - Liczby zawierające w rozkładzie na czynniki pierwsze wyłącznie liczby 2, 3 i 5

Definicja (Liczba regularna w pozycyjnym systemie liczbowym)

Liczbą regularną w systemie liczbowym o podstawie x jest:

- 1 Liczba całkowita zawierająca w rozkładzie na czynniki pierwsze wyłącznie liczby zawierające się w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby x ,
- 2 Ułamek, który pomnożony przez dowolną potęgę liczby x o wykładniku całkowitym spełnia warunek 1.

Liczby regularne

- Przykłady liczb regularnych
 - System dziesiętkowy
 - 4, 25, $\frac{5}{2}$
 - 3, 15, $\frac{1}{6}$
- Własność
 - Każda liczba regularna w systemie liczbowym podstawie x posiada **skończony** zapis pozycyjny w tym systemie
- Regularny system miar w systemie liczbowym o podstawie x
 - Stosunek wartości **każdyh dwóch** jednostek systemu miar jest liczbą regularną w systemie liczbowym o podstawie x
- Przykłady systemów regularnych
 - System metryczny w dziesiętkowym systemie liczbowym
 - System imperialny w dziesiętkowym systemie liczbowym
 - 1 stopa = 12 cali = $2^2 \cdot 3$ cali

Mezopotamski system liczbowy

𐎶	1	𐎶	11
𐎶𐎶	2	𐎶𐎶	12
𐎶𐎶𐎶	3	...	
𐎶𐎶𐎶𐎶	4	𐎶𐎶	20
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	5	𐎶𐎶𐎶	30
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	6	𐎶𐎶𐎶𐎶	40
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	7	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	50
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	8	...	
𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	9	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	58
𐎶	10	𐎶𐎶𐎶𐎶𐎶	59

Podwójne cyfry

• System addytywno-pozycyjny

- Sześćdziesiątkowy
- *Podwójne cyfry*
- Brak separatora dziesiątego
 - **Wartość nominalna i rzeczywista** ($17, \frac{17}{60}, 17 \cdot 3600$)

• Rozwój systemu liczbowego

- Okres wczesnodynastyczny (ok. 2900–2400 p.n.e.)
 - **Powstanie systemu**
- Okres starobabiloński (ok. 1894–1595 p.n.e.)
 - **Symbol zera lub odstęp**
- Dynastia Seleucydów (312–141 p.n.e.)
 - **Zera początkowe i końcowe w tekstach astronomicznych**

Bliskowschodnie systemy liczbowe

System mezopotamski

$$1 \cdot 60 + 11 = 71$$

$$2 \cdot 60 + 35 = 155$$

System staroperski

$$7 \cdot 10 + 1 = 71$$

$$15 \cdot 10 + 5 = 155$$

Zapis liczb w systemach mezopotamskim i staroperskim

- Mezopotamski mieszany system dziesiątkowy
 - Zasady zapisu
 - $< 100 \rightarrow$ **system sześćdziesiątkowy**
 - $\geq 100 \rightarrow$ **system dziesiątkowy**
 - *13 li-im 9 mi-at 1, 12*
 - **Abu Salabich, okres wczesnodynastyczny**
 - $13 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + (1, 12)_{60} = 13000 + 900 + 1 \cdot 60 + 12 \cdot 1 = 13972$
- System staroperski
 - Addytywny system dziesiątkowy
 - Mezopotamskie *podwójne cyfry*
 - Nieograniczona wartość “cyfr”
 - Brak zapisu pozycyjnego

Relacje między jednostkami

- **1.** Każda jednostka większa jest **wielokrotnością** mniejszej
 - System imperialny
- **2.** Stosunki długości wszystkich jednostek są **liczbami regularnymi** w systemie liczbowym danej kultury
 - System standardowy sumeryjsko-babiloński
- **3.** Stosunki długości wszystkich jednostek są **potęgami o wykładniku całkowitym** podstawy systemu liczbowego danej kultury
 - System metryczny

$$1 \wedge 2 \leftarrow 3$$

Sumeryjsko-babiloński system miar długości

Nazwa jednostki	Nazwa sumeryjska	Nazwa akadyjska	Długość w <i>ammatu</i>	Długość [cm]
<i>Ziarno jęczmienia</i>	še	<i>uṭṭetu</i>	$\frac{1}{180}$	0,278
<i>Palec</i>	šu-si	<i>ubānu</i>	$\frac{1}{30}$	1,667
$\frac{1}{3}$ <i>Łokcia</i>	šu-dù-a	<i>šīzu / šizû</i>	$\frac{1}{3}$	16,667
<i>Pół łokcia</i>	zipaḥ	<i>ūtu</i>	$\frac{1}{2}$	25
<i>Łokieć</i>	kùš	<i>ammatu</i>	1	50
<i>Pół trzciny</i>	—	<i>nikkas / nikkassu</i>	3	150
<i>Trzcina</i>	gi	<i>qanû</i>	6	300
<i>Pręt</i>	—	<i>nindan / nindānu</i>	12	600
<i>Pół liny</i>	—	<i>suppu</i>	60	3 000
<i>Lina</i>	éše	<i>ašlu</i>	120	6 000
“UŠ”	—	—	720	36 000
“bēru”	dana / danna	<i>bēru</i>	21 600	1 080 000

Standardowy sumeryjsko-babiloński system miar długości

Sumeryjsko-babiloński system miar długości

- System regularny w sześćdziesiątkowym systemie liczbowym
- Interpretacja zapisu “**3,20 ammatu**”
 - Wielkość **rzędu** *ammatu*, której wartość nominalna wynosi (3,20) *nindan* ($1 \text{ ammatu} = \frac{1}{12} \text{ nindan}$)

$$3 \cdot 60^{x+1} + 20 \cdot 60^x = \frac{1}{12} [\text{nindan}]$$

$$60^x = \frac{1}{4000}$$

$$x = \log_{60} \left(\frac{1}{4000} \right) = -2,025733 \approx -2$$

$$\begin{aligned} (0; 03, 20)_{60} &= 3 \cdot 60^{-1} + 20 \cdot 60^{-2} = \frac{3}{60} + \frac{20}{3600} = \frac{9 + 1}{180} = \\ &= \frac{1}{18} [\text{nindan}] = \frac{2}{3} [\text{ammatu}]. \end{aligned}$$

System Petriego (1877)

- Rysunki Pascala Coste'a i Eugène Flandina (1840)
- Regularność
 - Jednostki większe nie są wielokrotnościami mniejszych
 - Brak regularności w sześćdziesiątkowym systemie liczbowym
- Związki z systemami liczbowymi
 - Najczęstsze wielokrotności jednostki podstawowej
 - 25, 100 – regularne w systemie dziesiętkowym
 - $\frac{40}{3}$, $\frac{50}{3}$ – regularne w systemie sześćdziesiątkowym
 - Arisz (Indie), łokieć królewski (Egipt) – 64,325 cm ($25 \times \text{JP}$)

Nazwa jednostki	Długość [cm]	Długość [cale]
$\frac{1}{50}$ Arisz	1,944	0,7652
(Jednostka podstawowa)	2,573	1,013
$\frac{1}{12}$ łokcia babilońskiego	4,394	1,730
Łokieć babiloński	52,578	20,700
Łokieć asyryjski	54,293	21,375

Propozycja systemu miar Petriego dla Persepolis (1877)

System Babina (1891)

- Rysunki Pascala Coste'a i Eugène Flandina (1840)
- Regularność
 - System regularny w sześćdziesiątkowym systemie liczbowym
 - $\frac{\text{Kciuk}}{\text{Palec}} = \frac{\text{Stopa}}{\text{Łokieć}} = \frac{5}{3}$
- Związki z systemami mezopotamskimi
 - Brak jednostek o podobnych długościach
- Moduł promieniem kolumny na ustalonej wysokości
 - **Brama Kserksesa** – 15,5 palca = 71,3 cm
 - **Apadana** – 17 palców = 78,2 cm

Nazwa jednostki	Długość [cm]	Długość [łokieć]	Długość [kciuk]
<i>Kciuk (pouce)</i>	2,75	$\frac{1}{20}$	1
<i>Palec (doigt)</i>	4,6	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{3}$
<i>Stopa</i>	33	$\frac{3}{5}$	12
<i>Łokieć</i>	55	1	20

Propozycja systemu miar Babina dla Persepolis (1891)

System Kreftera (1971)

- **Wymiary cegieł**

- Cegły suszone – $33 \times 33 \times 13$ cm
- Uwzględnienie grubości fug – 1,0-1,5 cm

- **Regularność**

- System regularny w sześćdziesiątkowym systemie liczbowym
- Palec, dłoń, stopa, łokieć
 - **Odpowiedniki w systemach mezopotamskich**
 - **$r = 1,0272$, jeśli *ammatu* = 50 cm**
- łokieć królewski
 - **Dwukrotność stopy, procedura obliczeniowa?**

Nazwa jednostki	Długość [cm]	Długość [łokieć]	Długość [palec]
<i>Palec</i>	2,14	$\frac{1}{24}$	1
<i>Dłoń</i>	8,56	$\frac{1}{6}$	4
<i>Stopa</i>	34,24	$\frac{2}{3}$	16
<i>Łokieć</i>	51,36	1	24
<i>Królewski łokieć</i>	68,48	$\frac{4}{3}$	32

Propozycja systemu miar Kreftera dla Persepolis (1971)

System Roafa (1978)

- Znaczniki na platformach Pałacu Kserksesa i Pałacu Dariusza
- Interkolumnia
- Regularność
 - System regularny w sześćdziesiątkowym systemie liczbowym
 - Izomorfizm z podzbiorami systemów mezopotamskich i Kreftera
 - Brak łokcia królewskiego
 - Współczynniki proporcjonalności
 - Mezopotamski – $r = 1,0440$, jeśli *ammatu* = 50 cm
 - Kreftera – $r = 1,0164$

Nazwa jednostki	Długość [cm]	Długość [Pct.]	Długość [Pfinger]
<i>Persepolitański palec</i> (Pfinger)	2,2	$\frac{1}{24}$	1
<i>Persepolitańska dłoń</i> (Ppalm)	8,7	$\frac{1}{6}$	4
<i>Persepolitańska stopa</i> (Pft.)	34,7 – 34,8	$\frac{2}{3}$	16
<i>Persepolitański łokieć</i> (Pct.)	52,1 – 52,2	1	24

Propozycja systemu miar Roafa dla Persepolis (1978)

Propozycje jednostek miary dla Persepolis

- **Brak zachowanych tekstów i urządzeń pomiarowych**
- **Systemy regularne w sześćdziesiątkowym systemie liczbowym**
- **Współczynniki zmienności dla jednostek**
 - $v = \frac{\sigma}{\mu}, \quad \mu \neq 0$
 - łokieć – **3,6%**
 - stopa – **2,7%**
 - palec – **14,2%**
 - **Brak możliwości utożsamienia jednostek**

	BABIN 1891	KREFTER 1971	ROAF 1978
królewski łokieć	—	68,48	—
łokieć	55,20	51,36	52,1 – 52,2
stopa	33,10	34,24	34,7 – 34,8
dłoń	7,43	8,56	8,7
palec	2,75	2,14	2,2

Propozycje jednostek długości dla Persepolis [cm]

Moduł architektoniczny

*“Front świątyni doryckiej powinno się podzielić na 27 części, jeśli świątynia ma być czterokolumnowa, a na 42 części, jeśli ma być sześciokolumnowa. Jedna taka część będzie **modułem**, który stanowić będzie podstawę wszystkich obliczeń.” (Witruwiusz)*

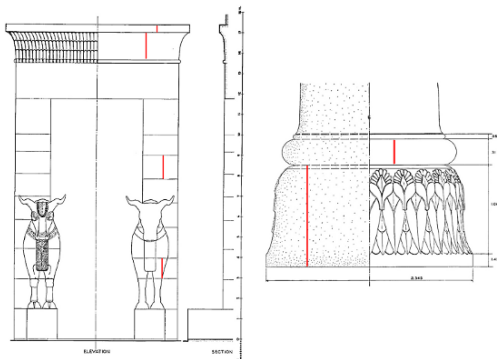
Definicja (Moduł)

Moduł architektoniczny zbioru pomiarów A (ozn. M_A) to największa wspólna jednostka taka, że każdą wartość pomiaru $a \in A$ można wyrazić jako (całkowitą) wielokrotność modułu z błędem bezwzględnym ϵ :

$$\forall a \in A : \exists n \in \mathbb{N}_+, \epsilon < M_A : a = n \cdot M_A + \epsilon.$$

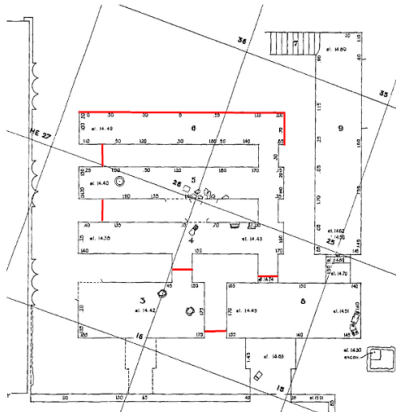
Moduł jako szczególny przypadek jednostki długości.

Wymiary architektoniczne I klasy



- **Pojedyncze elementy konstrukcyjne**
 - **Cegły, bloki kamienne**
- **Detale architektoniczne**

- **Pomieszczenia**
- **Ściany**
- **Interkolumnia**



Wymiary architektoniczne III klasy



- Budowle
- Ciągi komunikacyjne

Klasy wymiarów architektonicznych a moduł

- **Różnice otrzymanych wyników**
 - **Różne jednostki w systemie miar**
- Wymiary I klasy
 - → palec (~ 2 cm)
 - → dłoń (~ 8 cm)
- Wymiary II i III klasy
 - → stopa (~ 34 cm)
 - → łokieć (~ 52 cm)
- Wymiary poziome i pionowe
 - Inne jednostki? – Inna dokładność?
- **Weryfikacja otrzymanych wyników**
 - Niezależne zbiory danych
 - Wielokrotności mniejszych jednostek

Metody obliczania modułu

- Metoda kwantogramu cosinusowego

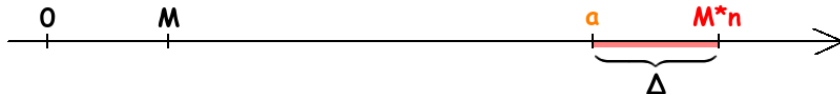
$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{i=1}^N \cos\left(\frac{2\pi a_i}{x}\right)$$

- ang. *cosine quantogram*
- Kendall, "Hunting quanta", 1974
- Zmodyfikowana metoda najmniejszych kwadratów

$$\psi(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (x \cdot \text{round}\left(\frac{a_i}{x}\right) - a_i)^2$$

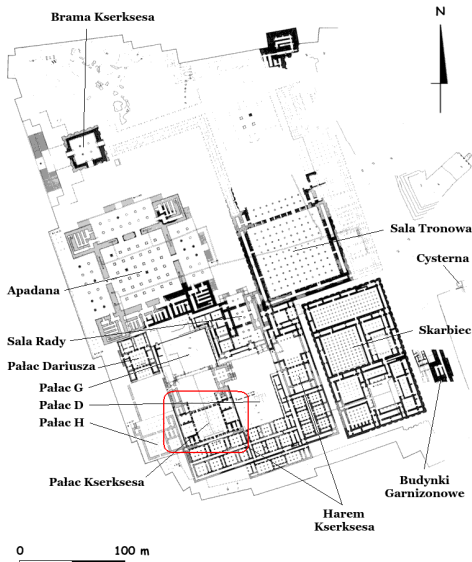
- Mustonen, 2012

Weryfikacja obliczonego modułu



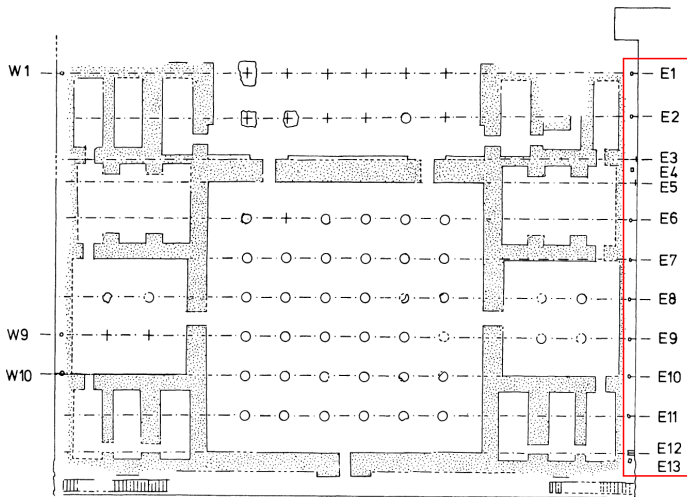
- Założenie: **M** jest modulem dla zbioru pomiarów A
- Dla każdego pomiaru $a \in A$:
 - $n = a/M$ zaokrąglone do liczby całkowitej
 - $a_M = M * n$
 - $\Delta_{(M,a)} = |a_M - a|$
- Dla wszystkich pomiarów, z wyjątkiem ich **pomijalnej liczby**, $a \in A$ wartość $\Delta_{(M,a)}$ jest **mała**
 - **M jest modulem dla zbioru A**
- Dla **znaczącej liczby** pomiarów $a \in A$ wartość $\Delta_{(M,a)}$ jest **duża**
 - **M nie jest modulem dla zbioru A**
- Statystyczna ocena błędu
 - średnia, odchylenie standardowe, mediana, minimum, maksimum

Pałac Kserksesa w Persepolis



- Kserkses I
 - 519 – 465 p.n.e.
- Znaczniki w postaci nacięć na platformie pałacu
 - **Wschodnia krawędź platformy**
 - Kolumny, ściany, otwory drzwiowe

Obliczenie modułu – przykład (ROAF 1978)



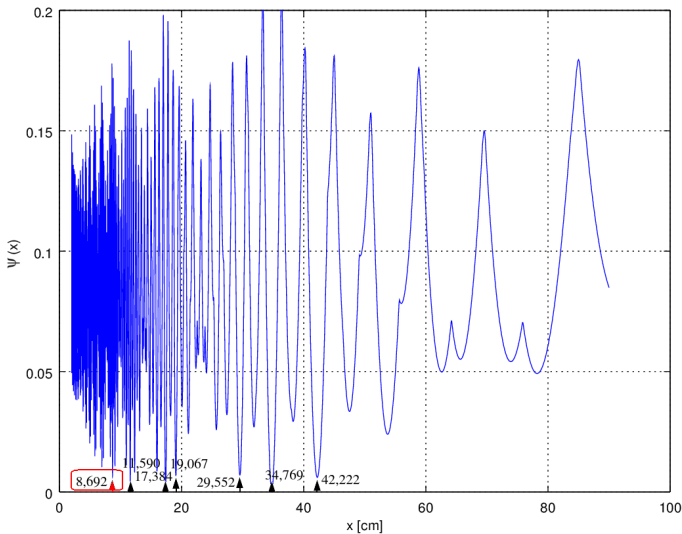
Plan Pałacu Kserksesa (ROAF 1978)

Obliczenie modułu – przykład (ROAF 1978)

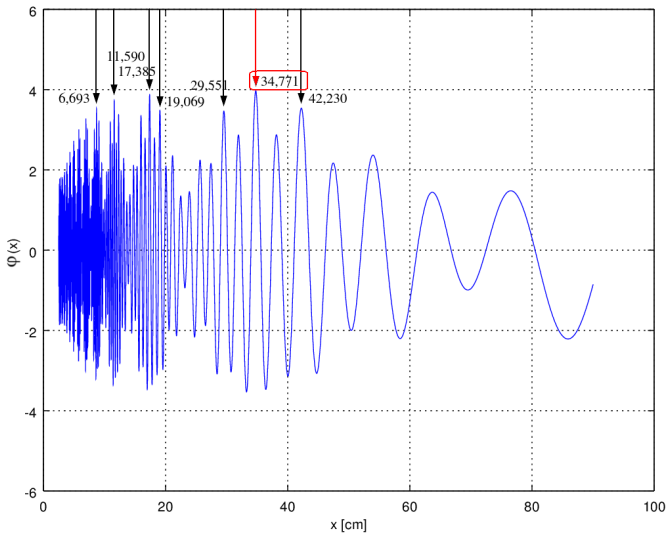
Moduł	Sposób wyboru wartości	Średni błąd	Mediana
4,261	MEDIAN	0,706	0,544
4,684	AVG TOTAL	1,183	1,328
4,728	MEDIAN	0,907	0,926
5,307	AVG TOTAL	1,244	1,250
5,225	MEDIAN	0,903	0,788
5,304	AVG TOTAL	1,254	1,313
5,225	MEDIAN	0,903	0,788
5,313	MEDIAN	1,266	1,250
5,405	AVG TOTAL	1,318	1,286
5,346	AVG MINMAX	1,336	1,423
5,457	MEDIAN	1,323	1,250
5,319	MEDIAN	1,276	1,271
5,391	AVG TOTAL	1,163	0,998
6,830	MEDIAN	0,930	0,674
8,500	AVG TOTAL	1,065	0,759
8,682	MEDIAN	0,710	0,705
8,659	MEDIAN	1,426	1,432
8,688	MEDIAN	0,594	0,500
8,690	MEDIAN	0,570	0,403
8,685	MEDIAN	0,652	0,602
8,522	MEDIAN	1,279	0,794
13,679	MEDIAN	2,625	1,500
13,696	MEDIAN	2,721	2,000
13,679	MEDIAN	2,625	1,500
13,917	MEDIAN	3,979	5,708
13,688	MEDIAN	2,703	1,750
13,679	MEDIAN	2,625	1,500
19,065	AVG MINMAX	1,397	1,455
34,772	MEDIAN	0,547	0,430
42,333	MEDIAN	2,729	2,250
42,444	MEDIAN	2,701	1,250
42,342	AVG TOTAL	2,727	2,172

- **A** = { 417,5; 417,0; 209,0; 382,0; 381,0; 382,5; 383,5; 383,0 } [cm]
- Wymiary II klasy
- Wartości o najmniejszych miarach błędu
 - **Stopa = 34,772 cm (34,760)**
 - **Dłóż = 8,690 cm (8,700)**

Pałac Kserksesa – metoda najmniejszych kwadratów



Pałac Kserksesa – kwantogram cosinusowy



Weryfikacja modułu – przykład (ROAF 1978)

- **Wschodnia krawędź platformy Pałacu Kserksesa, Persepolis**
- **$A = \{ 417,5; 417,0; 209,0; 382,0; 381,0; 382,5; 383,5; 383,0 \}$ [cm]**
- Hipotezy:
 - **MR = 34,760 [cm]** jest modułem (ROAF 1978)
 - **MB = 34,771 [cm]** jest modułem (BORYCKI 2013)

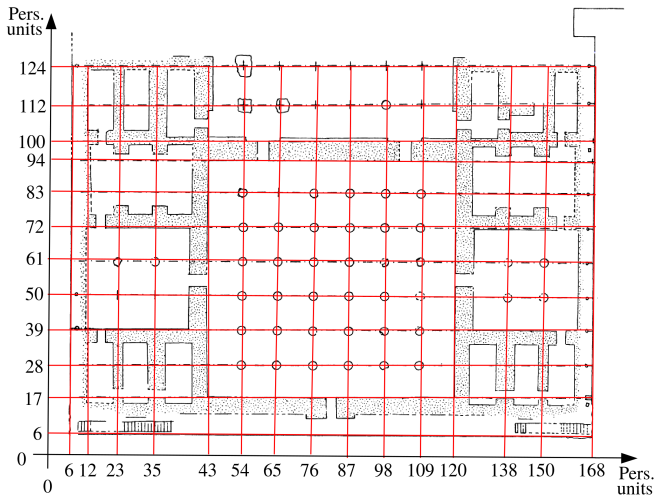
a	n	a_{MR}	a_{MB}	$\Delta_{(MR,a)}$	$\Delta_{(MB,a)}$
417,5	12	417,120	417,264	0,380	0,236
417,0	12	417,120	417,264	0,120	0,264
209,0	6	208,560	208,632	0,440	0,368
382,0	11	382,360	382,492	0,360	0,492
381,0	11	382,360	382,492	1,360	1,492
382,5	11	382,360	382,492	0,140	0,008
383,5	11	382,360	382,492	1,140	1,008
383,0	11	382,360	382,492	0,640	0,508

Weryfikacja modułu – przykład (ROAF 1978)

- **Wschodnia krawędź platformy Pałacu Kserksesa, Persepolis**
- **$A = \{ 417,5; 417,0; 209,0; 382,0; 381,0; 382,5; 383,5; 383,0 \}$ [cm]**
- Hipotezy:
 - **MR = 34,760 [cm]** jest modulem (ROAF 1978)
 - **MB = 34,771 [cm]** jest modulem (BORYCKI 2013)

	ROAF 1978	BORYCKI 2013
Średni błąd bezwzględny	0,573	0,547
Średni błąd kwadratowy	0,508	0,500
Mediana błędu	0,410	0,430
Błąd maksymalny	1,360	1,492
Błąd minimalny	0,120	0,008

Pałac Kserksesa – Lokalny układ współrzędnych



Plan Pałacu Kserksesa (ROAF 1978)

Analiza metrologiczna dawnych budowli w Persepolis

Dziękuję.

<http://www.pborycki.pl/pdf/modul5.pdf>