

Aplikacja wspierająca metrologiczną analizę wymiarów dawnych budowli

Bazy danych

Paweł Borycki

17 listopada 2015

<http://www.pborycki.pl/pdf/modul4.pdf>

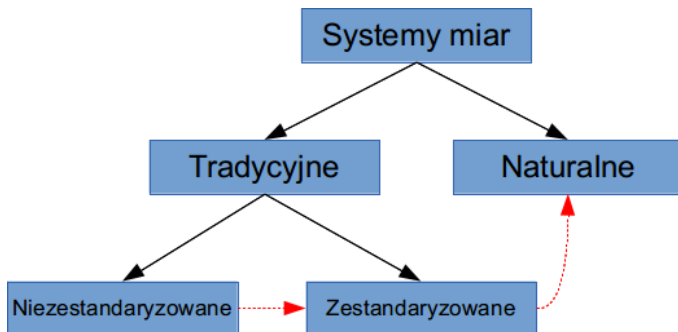
Plan prezentacji

- 1 Długość i jej miara
 - Systemy miar
 - Powiązania z systemem liczbowym
 - Liczby regularne
 - Bliskowschodnie systemy liczbowe
 - Sumeryjsko-babiloński system miar długości
- 2 Moduł architektoniczny
 - Definicja
 - Metody obliczania
 - Klasy wymiarów architektonicznych
 - Metoda kwantogramu cosinusowego / Zmodyfikowana metoda najmniejszych kwadratów
 - Przykładowe obliczenia
 - Pałac Kserksesa w Persepolis
- 3 Specyfikacja oprogramowania
 - Dane wejściowe
 - Wyniki działania

Fazy rozwoju systemów miar

- Hipoteza **V. Gordona Childe'a** – 3 fazy rozwoju systemów miar
- Wzrost znaczenia rzemiosła i handlu
 - Formalizacja definicji jednostek miar
 - Precyzja pomiaru
- **1. Pomiar poprzez porównanie i decyzję binarną**
 - Produkcja na potrzeby własnego gospodarstwa
 - Brak specjalizacji
 - Np. dopasowanie części narzędzia
- **2. Tradycyjny system miar długości**
 - Jednostki oparte na długości części ciała
 - Długość wyrażana jako liczba jednostek
 - Wymiana towarów między gospodarstwami
- **3. Zestandaryzowany tradycyjny system miar długości**
 - Dokładność i powtarzalność jednostek miar
 - Standaryzacja jednostek dokonywana przez elity
 - Obecność wzorców, np. prętów mierniczych

Podział systemów miar



- Systemy naturalne (np. **metryczny**)
 - Zdefiniowane poprzez stałe fizyczne
- Systemy tradycyjne zestandaryzowane (np. **imperialny**)
 - Zdefiniowane poprzez prawo
- Większe jednostki
 - Wielokrotności mniejszych jednostek
 - Liczby regularne

Liczby regularne

- Pozycyjny system liczbowy o podstawie x
 - $(a_i \dots a_1 a_0)_x = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + \dots + a_i \cdot x^i$
 - $0 \leq a_0 \dots a_i \leq x - 1, a_0 \dots a_i \in \mathbb{N}$
- Okres starobabiloński
 - Sześćdziesiątkowy system liczbowy
 - Liczby zawierające w rozkładzie na czynniki pierwsze wyłącznie liczby 2, 3 i 5

Definicja (Liczba regularna w pozycyjnym systemie liczbowym)

Liczbą regularną w systemie liczbowym o podstawie x jest:

- 1 Liczba całkowita zawierająca w rozkładzie na czynniki pierwsze wyłącznie liczby zawierające się w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby x ,
- 2 Ułamek, który pomnożony przez dowolną potęgę liczby x o wykładniku całkowitym spełnia warunek 1.

Liczby regularne

- Przykłady liczb regularnych
 - System dziesiętkowy
 - 4, 25, $\frac{5}{2}$
 - 3, 15, $\frac{1}{6}$
- Własność
 - Każda liczba regularna w systemie liczbowym podstawie x posiada **skończony** zapis pozycyjny w tym systemie
- Regularny system miar w systemie liczbowym o podstawie x
 - Stosunek wartości **każdych dwóch** jednostek systemu miar jest liczbą regularną w systemie liczbowym o podstawie x
- Przykłady systemów regularnych
 - System metryczny w dziesiętkowym systemie liczbowym
 - System imperialny w dziesiętkowym systemie liczbowym
 - 1 stopa = 12 cali = $2^2 \cdot 3$ cali

Mezopotamski system liczbowy

	1		11
	2		12
	3	...	
	4		20
	5		30
	6		40
	7		50
	8	...	
	9		58
	10		59

Podwójne cyfry

• System addytywno-pozycyjny

- Sześćdziesiątkowy
- *Podwójne cyfry*
- Brak separatora dziesiątego
 - **Wartość nominalna i rzeczywista** ($17, \frac{17}{60}, 17 \cdot 3600$)

• Rozwój systemu liczbowego

- Okres wczesnodynastyczny (ok. 2900–2400 p.n.e.)
 - **Powstanie systemu**
- Okres starobabiloński (ok. 1894–1595 p.n.e.)
 - **Symbol zera lub odstęp**
- Dynastia Seleucydów (312–141 p.n.e.)
 - **Zera początkowe i końcowe w tekstach astronomicznych**

Bliskowschodnie systemy liczbowe

System mezopotamski

$$1 \cdot 60 + 11 = 71$$

$$2 \cdot 60 + 35 = 155$$

System staroperski

$$7 \cdot 10 + 1 = 71$$

$$15 \cdot 10 + 5 = 155$$

**Zapis liczb w systemach
mezopotamskim i staroperskim**

- Mezopotamski mieszany system dziesiątkowy
 - Zasady zapisu
 - $< 100 \rightarrow$ **system sześćdziesiątkowy**
 - $\geq 100 \rightarrow$ **system dziesiątkowy**
 - *13 li-im 9 mi-at 1, 12*
 - **Abu Salabich, okres wczesnodynastyczny**
 - $13 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + (1, 12)_{60} = 13000 + 900 + 1 \cdot 60 + 12 \cdot 1 = 13972$
- System staroperski
 - Addytywny system dziesiątkowy
 - Mezopotamskie *podwójne cyfry*
 - **Nieograniczona wartość “cyfr”**
 - **Brak zapisu pozycyjnego**

Relacje między jednostkami

- **1.** Każda jednostka większa jest **wielokrotnością** mniejszej
 - System imperialny
- **2.** Stosunki długości wszystkich jednostek są **liczbami regularnymi** w systemie liczbowym danej kultury
 - System standardowy sumeryjsko-babiloński
- **3.** Stosunki długości wszystkich jednostek są **potęgami o wykładniku całkowitym** podstawy systemu liczbowego danej kultury
 - System metryczny

$$1 \wedge 2 \leftarrow 3$$

Sumeryjsko-babiloński system miar długości

Nazwa jednostki	Nazwa sumeryjska	Nazwa akadyjska	Długość w <i>ammatu</i>	Długość [cm]
<i>Ziarno jęczmienia</i>	še	<i>uṭṭetu</i>	$\frac{1}{180}$	0,278
<i>Palec</i>	šu-si	<i>ubānu</i>	$\frac{1}{30}$	1,667
$\frac{1}{3}$ Łokcia	šu-dù-a	<i>šīzu / šizû</i>	$\frac{1}{3}$	16,667
<i>Pół łokcia</i>	zipaḥ	<i>ūtu</i>	$\frac{1}{2}$	25
<i>Łokieć</i>	kùš	<i>ammatu</i>	1	50
<i>Pół trzciny</i>	—	<i>nikkas / nikkassu</i>	3	150
<i>Trzcina</i>	gi	<i>qanû</i>	6	300
<i>Pręt</i>	—	<i>nindan / nindānu</i>	12	600
<i>Pół liny</i>	—	<i>suppu</i>	60	3 000
<i>Lina</i>	éše	<i>ašlu</i>	120	6 000
“UŠ”	—	—	720	36 000
“bēru”	dana / danna	<i>bēru</i>	21 600	1 080 000

Standardowy sumeryjsko-babiloński system miar długości

Sumeryjsko-babiloński system miar długości

- System regularny w sześćdziesiątkowym systemie liczbowym
- Interpretacja zapisu “**3,20 ammatu**”
 - Wielkość **rzędu ammatu**, której wartość nominalna wynosi (3,20) *nindan* ($1 \text{ ammatu} = \frac{1}{12} \text{ nindan}$)

$$3 \cdot 60^{x+1} + 20 \cdot 60^x = \frac{1}{12} [\text{nindan}]$$

$$60^x = \frac{1}{4000}$$

$$x = \log_{60} \left(\frac{1}{4000} \right) = -2,025733 \approx -2$$

$$\begin{aligned} (0; 03, 20)_{60} &= 3 \cdot 60^{-1} + 20 \cdot 60^{-2} = \frac{3}{60} + \frac{20}{3600} = \frac{9 + 1}{180} = \\ &= \frac{1}{18} [\text{nindan}] = \frac{2}{3} [\text{ammatu}]. \end{aligned}$$

Moduł architektoniczny

*“Front świątyni doryckiej powinno się podzielić na 27 części, jeśli świątynia ma być czterokolumnowa, a na 42 części, jeśli ma być sześciokolumnowa. Jedna taka część będzie **modułem**, który stanowić będzie podstawę wszystkich obliczeń.” (Witruwiusz)*

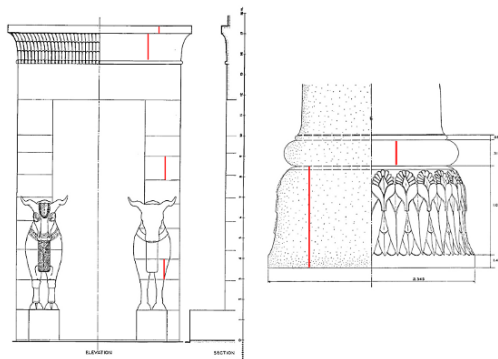
Definicja (Moduł)

Moduł architektoniczny zbioru pomiarów A (ozn. M_A) to największa wspólna jednostka taka, że każdą wartość pomiaru $a \in A$ można wyrazić jako (całkowitą) wielokrotność modułu z błędem bezwzględnym ϵ :

$$\forall a \in A : \exists n \in \mathbb{N}_+, \epsilon < M_A : a = n \cdot M_A + \epsilon.$$

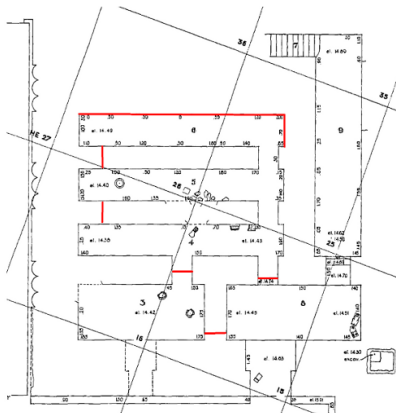
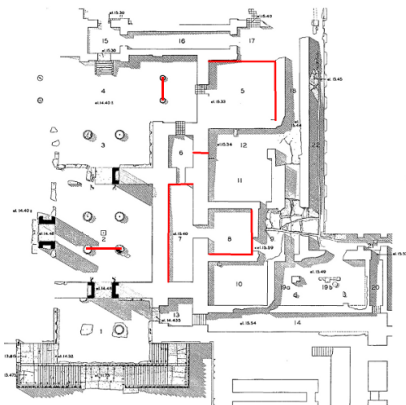
Moduł jako szczególny przypadek jednostki długości.

Wymiary architektoniczne I klasy



- **Pojedyncze elementy konstrukcyjne**
 - **Cegły, bloki kamienne**
- **Detale architektoniczne**

- **Pomieszczenia**
- **Ściany**
- **Interkolumnia**



Wymiary architektoniczne III klasy



- Budowle
- Ciągi komunikacyjne

Klasy wymiarów architektonicznych a moduł

- **Różnice otrzymanych wyników**
 - **Różne jednostki w systemie miar**
- Wymiary I klasy
 - → palec (~ 2 cm)
 - → dłoń (~ 8 cm)
- Wymiary II i III klasy
 - → stopa (~ 34 cm)
 - → łokieć (~ 52 cm)
- Wymiary poziome i pionowe
 - Inne jednostki? – Inna dokładność?
- **Weryfikacja otrzymanych wyników**
 - Niezależne zbiory danych
 - Wielokrotności mniejszych jednostek

Metody obliczania modułu

- Metoda kwantogramu cosinusowego

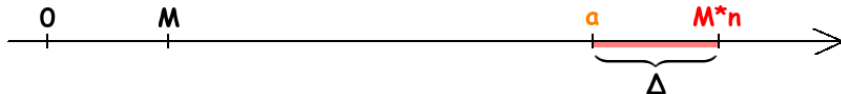
$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{i=1}^N \cos\left(\frac{2\pi a_i}{x}\right)$$

- ang. *cosine quantogram*
- Kendall, "Hunting quanta", 1974
- Zmodyfikowana metoda najmniejszych kwadratów

$$\psi(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (x \cdot \text{round}\left(\frac{a_i}{x}\right) - a_i)^2$$

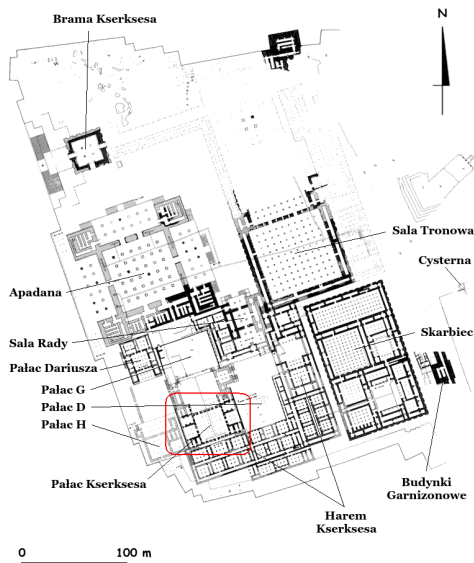
- Mustonen, 2012

Weryfikacja obliczonego modułu



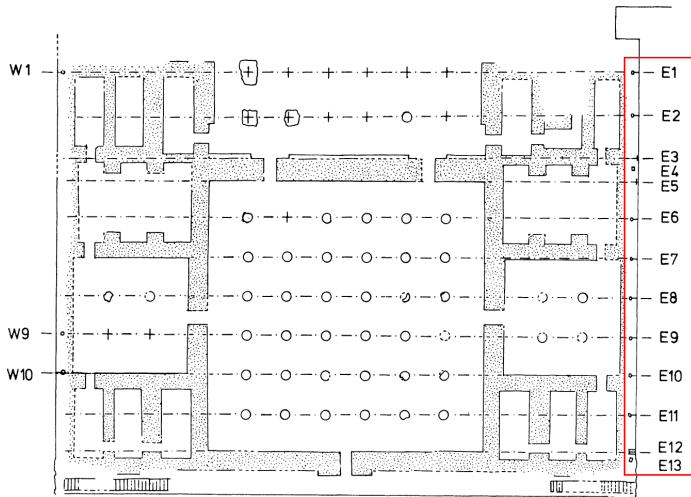
- Założenie: **M** jest modułem dla zbioru pomiarów A
- Dla każdego pomiaru $a \in A$:
 - $n = a/M$ zaokrąglone do liczby całkowitej
 - $a_M = M * n$
 - $\Delta_{(M,a)} = |a_M - a|$
- Dla wszystkich pomiarów, z wyjątkiem ich **pomijalnej liczby**, $a \in A$ wartość $\Delta_{(M,a)}$ jest **mała**
 - **M jest modułem dla zbioru A**
- Dla **znaczącej liczby** pomiarów $a \in A$ wartość $\Delta_{(M,a)}$ jest **duża**
 - **M nie jest modułem dla zbioru A**
- Statystyczna ocena błędu
 - średnia, odchylenie standardowe, mediana, minimum, maksimum

Pałac Kserksesa w Persepolis



- Kserkses I
 - 519 – 465 p.n.e.
- Znaczniki w postaci nacięć na platformie pałacu
 - **Wschodnia krawędź platformy**
 - Kolumny, ściany, otwory drzwiowe

Obliczenie modułu – przykład (ROAF 1978)



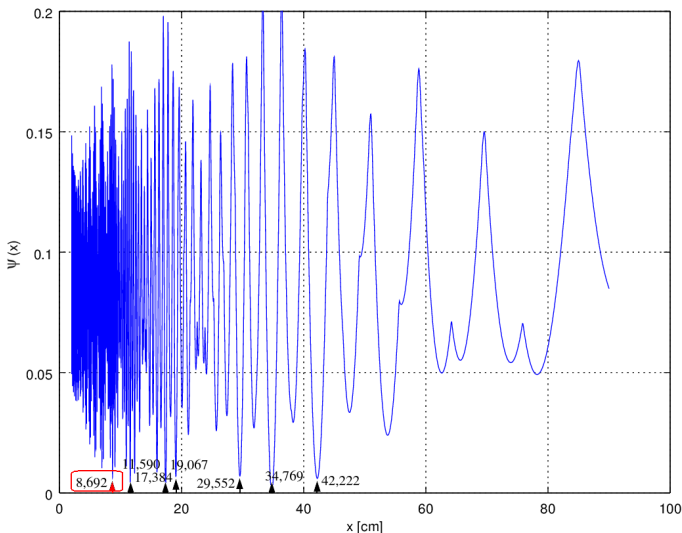
Plan Pałacu Kserksesa (ROAF 1978)

Obliczenie modułu – przykład (ROAF 1978)

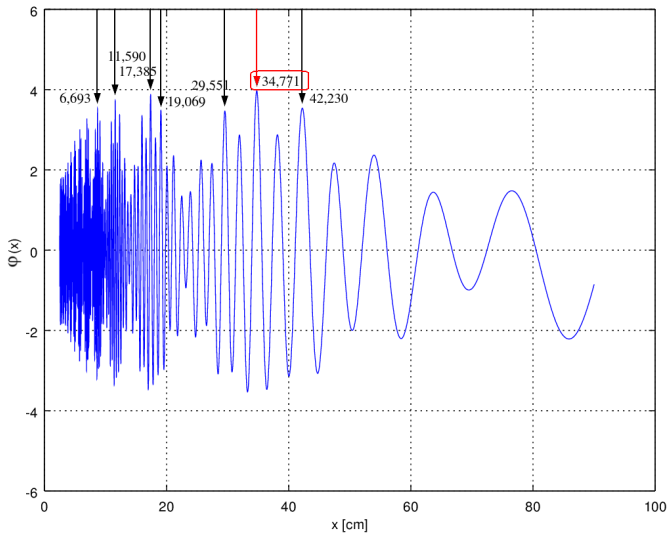
Moduł	Sposób wyboru wartości	Średni błąd	Mediana
4,261	MEDIAN	0,706	0,544
4,684	AVG TOTAL	1,183	1,328
4,728	MEDIAN	0,907	0,926
5,307	AVG TOTAL	1,244	1,250
5,225	MEDIAN	0,903	0,788
5,304	AVG TOTAL	1,254	1,313
5,225	MEDIAN	0,903	0,788
5,313	MEDIAN	1,266	1,250
5,405	AVG TOTAL	1,318	1,286
5,346	AVG MINMAX	1,336	1,423
5,457	MEDIAN	1,323	1,250
5,319	MEDIAN	1,276	1,271
5,391	AVG TOTAL	1,163	0,998
6,830	MEDIAN	0,930	0,674
8,500	AVG TOTAL	1,065	0,759
8,682	MEDIAN	0,710	0,705
8,659	MEDIAN	1,426	1,432
8,688	MEDIAN	0,594	0,500
8,690	MEDIAN	0,570	0,403
8,685	MEDIAN	0,652	0,602
8,522	MEDIAN	1,279	0,794
13,679	MEDIAN	2,625	1,500
13,696	MEDIAN	2,721	2,000
13,679	MEDIAN	2,625	1,500
13,917	MEDIAN	3,979	5,708
13,688	MEDIAN	2,703	1,750
13,679	MEDIAN	2,625	1,500
19,065	AVG MINMAX	1,397	1,455
34,772	MEDIAN	0,547	0,430
42,333	MEDIAN	2,729	2,250
42,444	MEDIAN	2,701	1,250
42,342	AVG TOTAL	2,727	2,172

- **A** = { 417,5; 417,0; 209,0; 382,0; 381,0; 382,5; 383,5; 383,0 } [cm]
- Wymiary **II klasy**
- Wartości o najmniejszych miarach błędu
 - **Stopa = 34,772 cm (34,760)**
 - **Dłóż = 8,690 cm (8,700)**

Pałac Kserksesa – metoda najmniejszych kwadratów



Pałac Kserksesa – kwantogram sinusowy



Weryfikacja modułu – przykład (ROAF 1978)

- **Wschodnia krawędź platformy Pałacu Kserksesa, Persepolis**
- **$A = \{ 417,5; 417,0; 209,0; 382,0; 381,0; 382,5; 383,5; 383,0 \}$ [cm]**
- Hipotezy:
 - **MR = 34,760 [cm]** jest modulem (ROAF 1978)
 - **MB = 34,771 [cm]** jest modulem (BORYCKI 2013)

a	n	a_{MR}	a_{MB}	$\Delta_{(MR,a)}$	$\Delta_{(MB,a)}$
417,5	12	417,120	417,264	0,380	0,236
417,0	12	417,120	417,264	0,120	0,264
209,0	6	208,560	208,632	0,440	0,368
382,0	11	382,360	382,492	0,360	0,492
381,0	11	382,360	382,492	1,360	1,492
382,5	11	382,360	382,492	0,140	0,008
383,5	11	382,360	382,492	1,140	1,008
383,0	11	382,360	382,492	0,640	0,508

Weryfikacja modułu – przykład (ROAF 1978)

- **Wschodnia krawędź platformy Pałacu Kserksesa, Persepolis**
- **$A = \{ 417,5; 417,0; 209,0; 382,0; 381,0; 382,5; 383,5; 383,0 \}$ [cm]**
- Hipotezy:
 - **MR = 34,760 [cm]** jest modulem (ROAF 1978)
 - **MB = 34,771 [cm]** jest modulem (BORYCKI 2013)

	ROAF 1978	BORYCKI 2013
Średni błąd bezwzględny	0,573	0,547
Średni błąd kwadratowy	0,508	0,500
Mediana błędu	0,410	0,430
Błąd maksymalny	1,360	1,492
Błąd minimalny	0,120	0,008

Specyfikacja oprogramowania

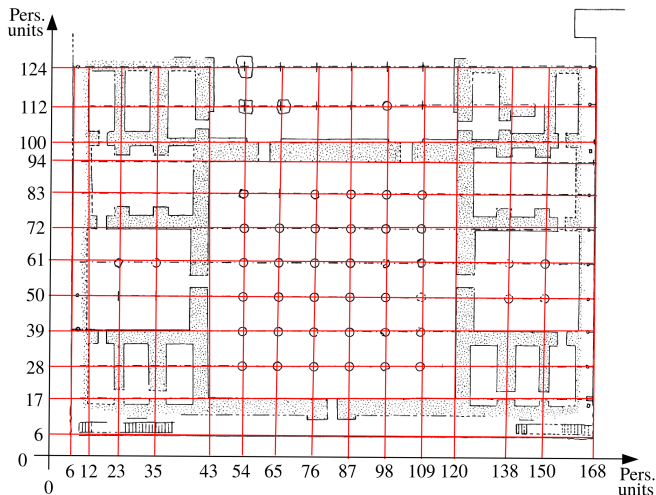
- Dane

- Plany architektoniczne budowli
 - **Plany wektorowe**
 - **Plany rastrowe (GEOTIFF)**
- Informacje uzupełniające
 - **System liczbowy**

- Wynik

- Raport dotyczący możliwych modułów
- Plan wektorowy w lokalnym układzie współrzędnych
 - **Możliwość edycji**
 - **Dobór jednostek i ich wielokrotności**

Lokalny układ współrzędnych



Plan Pałacu Kserksesa (ROAF 1978)

Aplikacja wspierająca metrologiczną analizę wymiarów dawnych budowli

Dziękuję.

<http://www.pborycki.pl/pdf/modul4.pdf>