

Datowanie radiowęglowe – wstęp teoretyczny

Wstęp do archeologii

Paweł Borycki

5 stycznia 2012

Plan prezentacji

- 1 Podstawy statystyki
 - Wartość oczekiwana
 - Odchylenie standardowe
 - Rozkład normalny
- 2 Fizyka jądra atomowego
 - Budowa atomu
 - Rozpad radioaktywny atomu
 - Rozpad β^-
 - Prawo rozpadu promieniotwórczego
 - Izotopy węgla
- 3 Czas radiowęglowy
 - Definicja czasu radiowęglowego
 - Krzywe kalibracyjne
 - Kalibracja

Zmienna losowa

Definicja (Zdarzenie elementarne)

Zbiorem zdarzeń elementarnych (ozn. Ω) jest zbiór wszystkich możliwych wyników eksperymentu losowego.

Definicja (Zmienna losowa)

Zmienna losowa to funkcja przypisująca każdemu zdarzeniu losowemu $\omega \in \Omega$ wartość liczbową.

Może mieć rozkład **dyskretny** lub **ciągły**.

Przykład. Eksperyment losowy – rzut monetą.

Zbiór zdarzeń elementarnych: $\Omega = \{\text{orzeł, reszka}\}$

Zmienna losowa X :

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \omega = \text{“wyrzucono reszkę”} \\ 0 & \text{jeśli } \omega = \text{“wyrzucono orła”} \end{cases}$$

Wartość oczekiwana (rozkład dyskretny)

Intuicja: *Wartość oczekiwana* to spodziewany wynik doświadczenia losowego.

Definicja (Wartość oczekiwana (rozkład dyskretny))

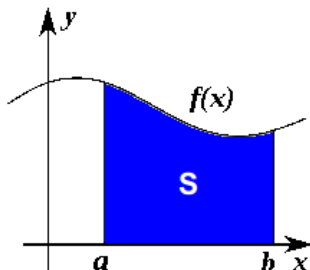
Jeżeli dyskretna zmienna losowa X przyjmuje wartości $x_1, \dots, x_n$ z prawdopodobieństwami odpowiednio $p_1, \dots, p_n$ to **wartość oczekiwana** zmiennej losowej X (ozn. $\mathbb{E}X$) wynosi:

$$\mathbb{E}X = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Przykład. Eksperyment losowy – rzut monetą.

$$\mathbb{E}X = X(\text{reszka}) \cdot \frac{1}{2} + X(\text{orzeł}) \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

Całka oznaczona – intuicja



Całka oznaczona

- **Pole powierzchni** między wykresem funkcji $f(x)$ w pewnym przedziale $[a, b]$ a osią odciętych (OX), wzięte ze znakiem dodatnim dla dodatnich wartości funkcji, a ujemnym dla ujemnych.
- Oznaczenie:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Funkcja gęstości prawdopodobieństwa

Definicja (Funkcja gęstości prawdopodobieństwa)

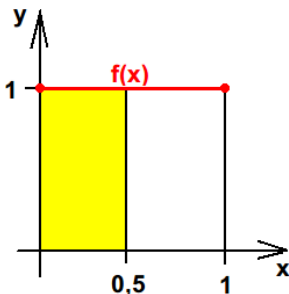
Jednowymiarową **funkcją gęstości prawdopodobieństwa** jest funkcja borelowska (ciągła) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

Intuicja: Dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ liczba

$\int_a^b f(x) dx$ oznacza prawdopodobieństwo wylosowania wartości należącej przedziału $[a; b]$.

Zmienne losowe o rozkładzie ciągłym



Zmienna losowa o rozkładzie ciągłym

Przykład. Losuję liczby rzeczywiste z przedziału $[0; 1]$. Prawdopodobieństwo wylosowania każdej liczby jest identyczne. (Rozkład prawdopodobieństwa jest jednostajny). Jakie jest prawdopodobieństwo:

❶ wylosowania liczby $\frac{1}{2}$?

$$\bullet \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 0 \cdot 1 = 0$$

❷ wylosowania liczby z przedziału $[0; \frac{1}{2}]$?

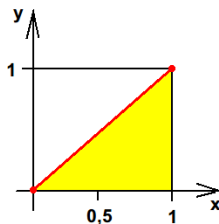
$$\bullet \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Wartość oczekiwana (rozkład ciągły)

Definicja (Wartość oczekiwana (rozkład ciągły))

Jeżeli X jest jednowymiarową zmienną losową o rozkładzie ciągłym z gęstością $f(x)$, to jej wartość oczekiwana wynosi:

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

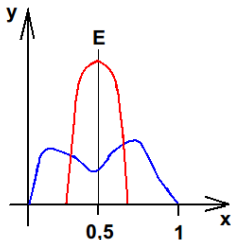


Przykład. (Losowanie liczby z przedziału $[0; 1]$, jednostajny rozkład prawdopodobieństwa)

$f(x) = 1$ dla $x \in [0; 1]$. Zatem $x \cdot f(x) = x$.

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$$

Odchylenie standardowe



Intuicja: Jak szeroko wokół *wartości oczekiwanej* rozrzucone są wartości przyjmowane przez *zmienną losową*?

- Małe odchylenie standardowe
- Duże odchylenie standardowe

Definicja (Odchylenie standardowe)

Odchylenie standardowe (ozn. σ) jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji i wynosi:

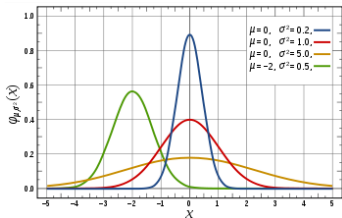
$$\sigma = \sqrt{E([X - E(X)]^2)} = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2}$$

Rozkład normalny

Definicja (Rozkład normalny)

Rozkład normalny (Rozkład Gaussa) z wartością oczekiwaną μ i odchyleniem standardowym σ (ozn. $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$) to ciągły rozkład zmiennej losowej, którego funkcja gęstości wyraża się wzorem:

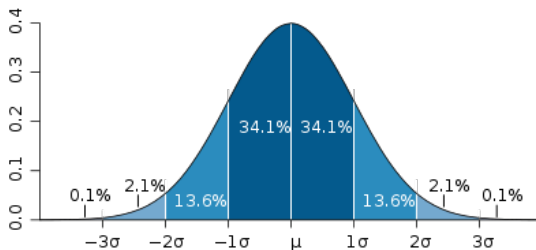
$$\phi_{\mu, \sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



- Statystyczny opis zagadnień przyrodniczych, społecznych
- Właściwości matematyczne
- Notacja

- $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$
- $X = \mu \pm \sigma$

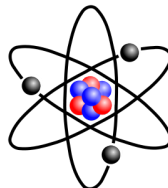
Rozkład normalny – przedziały ufności



- Rozkład symetryczny względem wartości oczekiwanej
 - $P(x \geq \mu) = P(x \leq \mu) = \frac{1}{2}$
- Odległość od wartości oczekiwanej – przedziały ufności
 - 68,3% wartości leży w odległości $\leq \sigma$ od wartości oczekiwanej
 - 95,5% wartości leży w odległości $\leq 2\sigma$ od wartości oczekiwanej
 - 99,7% wartości leży w odległości $\leq 3\sigma$ od wartości oczekiwanej

Budowa atomu

- Jądro (nukleony)
 - **protony** ($Q = +1e$)
 - **neutrony** ($Q = 0$)
- Powłoki elektronowe
 - elektrony ($Q = -1e$)
- Notacja



- **A** – liczba masowa (suma liczby protonów i neutronów w jądrze)
- **Z** – liczba atomowa (liczba protonów w jądrze)
- **E** – symbol pierwiastka,
jednoznacznie określony przez **liczbę atomową (Z)**

Izotopy pierwiasta chemicznego



- A – liczba masowa (suma liczby protonów i neutronów w jądrze)
- Z – liczba atomowa (liczba protonów w jądrze)

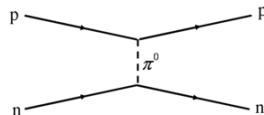
Definicja (Izotopy)

Izotopami pierwiastka chemicznego nazywamy jego odmiany różniące się liczbą **neutronów** w jądrze atomu.

Oddziaływania wewnątrz jądra atomowego

Siły jądrowe

- Siły jądrowe
 - Oddziaływania między nukleonami
 - Efekt rezydualny silnych oddziaływań między kwarkami
 - Charakter przyciągający
 - $0,7 \cdot 10^{-15} \text{m} < r < 2,5 \cdot 10^{-15} \text{m}$
 - Charakter odpychający
 - $r < 0,7 \cdot 10^{-15} \text{m}$
 - Maleją wykładniczo wraz z odległością
 - Niezależne od rodzaju nukleonów
 - Energia wiązań a defekt masy



- Potencjał Yukawego

$$V_Y(r) = k_Y \cdot \frac{e^{-mr}}{r}$$

Oddziaływania wewnątrz jądra atomowego

Siła Coulomba



- Siła Coulomba między protonami

- Charakter odpychający
- Maleje kwadratowo wraz z odległością
- Zaczyna dominować przy odległości $1,7 \cdot 10^{-15} \text{m}$

- Potencjał Yukawego

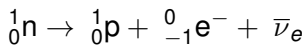
$$V_Y(r) = k_Y \cdot \frac{e^{-mr}}{r}$$

- Siła Coulomba

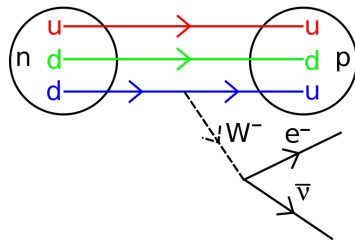
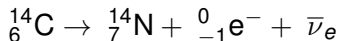
$$F_C(r) = k_C \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Rozpad β^-

- Nadmiar neutronów w jądrze
- Mechanizm rozpadu β^-



- **Kwark górny (u)**
 - $Q = +\frac{2}{3}e$
 - **Kwark dolny (d)**
 - $Q = -\frac{1}{3}e$
 - Antyneutrino ($\bar{\nu}_e$)
 - Bozon (W^-)
- Przykład rozpadu β^-



Prawo rozpadu promieniotwórczego

Twierdzenie (Prawo rozpadu promieniotwórczego)

Prawdopodobieństwo rozpadu atomów danego izotopu jest:

- 1 **jednakowe** dla każdego z nich,
- 2 **niezależne** od rozpadu innych atomów tego izotopu,
- 3 **niezmienne w czasie** trwania procesu rozpadu,

zaś zależność **wartości oczekiwanej liczby atomów** ulegających rozpadowi od czasu trwania rozpadu wyraża się wzorem

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

N_0 – początkowa liczba atomów izotopu w czasie $t = 0$,
 λ – stała rozpadu charakterystyczna dla danego izotopu.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Prawo rozpadu promieniotwórczego

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Średni czas życia τ

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

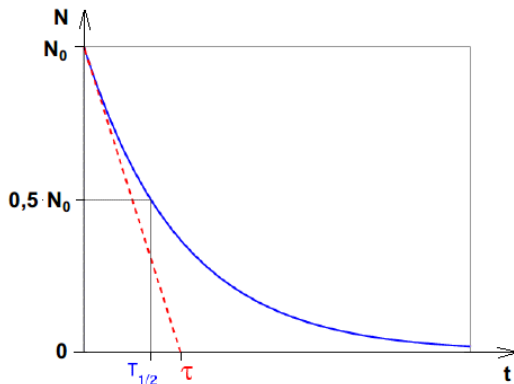
Czas połowicznego rozpadu $T_{1/2}$

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda t} \Rightarrow 2 = e^{\lambda t}$$

$$\ln 2 = \lambda t$$

$$T_{1/2} = t = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}$$

λ – stała rozpadu
charakterystyczna dla danego
izotopu.

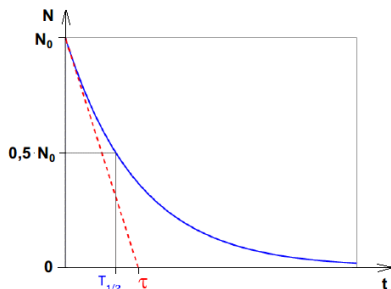


Rozpad wykładniczy

Czas połowicznego rozpadu

Definicja (Czas połowicznego rozpadu)

Czas połowicznego rozpadu (ozn. $T_{1/2}$) to czas, po upływie którego **wartość oczekiwana liczby atomów** izotopu ulegającego rozpadowi wynosi **połowę** początkowej liczby atomów tego izotopu.

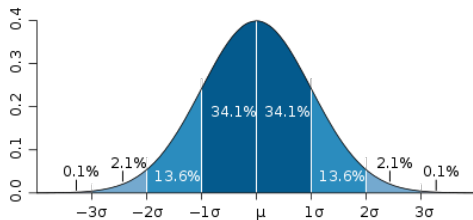


Rozpad wykładniczy

Wniosek. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na rozpadnięciu się dowolnego atomu promieniotwórczego izotopu w czasie $T_{1/2}$ wynosi $\frac{1}{2}$.

Czas połowicznego rozpadu jako zmienna losowa

Czas połowicznego rozpadu to zmienna losowa opisująca czas, po upływie którego ~~wartość oczekiwana~~ **liczba atomów** izotopu ulegającego rozpadowi wynosi **połowę** początkowej liczby atomów tego izotopu.



Rozkład normalny

Czas połowicznego rozpadu *zdefiniowany jako zmienna losowa* ma **rozkład normalny**.

Przykład. Izotop ^{14}C .

- $T_{\frac{1}{2}} = 5730 \pm 40$ lat
- $\mu = 5730$ lat
- $\sigma = 40$ lat

Węgiel i jego izotopy

^8C ^9C ^{10}C ^{11}C ^{12}C ^{13}C ^{14}C ^{15}C ^{16}C ^{17}C ^{18}C ^{19}C ^{20}C ^{21}C ^{22}C ^{23}C

- 16 izotopów
 - 3 występujące naturalnie na Ziemi [^{12}C ^{13}C ^{14}C]
 - 2 stabilne [^{12}C ^{13}C]
- Równowaga dynamiczna w przyrodzie

Izotop	Udział molowy
^{12}C	0.9893(8)
^{13}C	0.0107(8)
^{14}C	ok. 10^{-12}

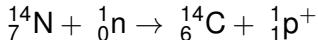
Udział molowy izotopów trwałych

Izotop	Czas połowicznego rozpadu
^8C	$2,04 \cdot 10^{-21} \text{ s}$
^{10}C	19,290 s
^{11}C	20,3342 min
^{14}C	5730 lat
^{15}C	2,4495 s
^{22}C	$6.213 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

Czas połowicznego rozpadu izotopów nietrwałych

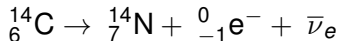
Izotop ^{14}C

- Powstawanie



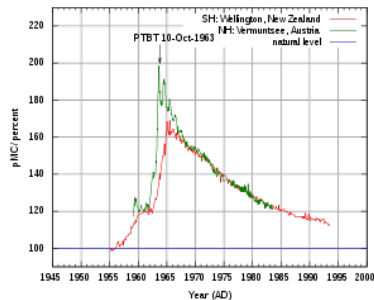
- Pogranicze troposfery i stratosfery
- Wysoka szerokość geomagnetyczna
- Elektrony termiczne

- Rozpad β^-

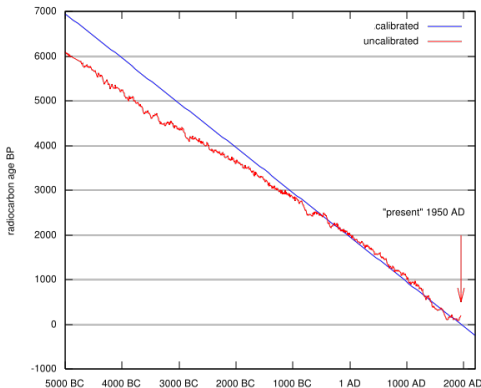


- Zakłócenia antropogeniczne

- Spalanie kopalnych paliw węglowodorowych – efekt Suessa (spadek udziału ^{14}C)
- Reakcje jądrowe inicjowane przez człowieka (wzrost udziału ^{14}C)



Czas radiowęglowy – intuicja



Aktywność ^{14}C *generalnie* **maleje** w czasie.

Podstawowa idea

- Wyrażenie czasu w terminach radioaktywności w ujęciu statystycznym

Potencjalne trudności

- Zmienność aktywności izotopu ^{14}C w czasie i przestrzeni
 - **Aktywność słoneczna**
 - **Pole geomagnetyczne**
 - **Skład atmosfery**
 - **Wysokość bezwzględna**
- Niedeterminizm rozpadu promieniotwórczego

Czas radiowęglowy

Definicja (Uncalibrated (Libby) annum)

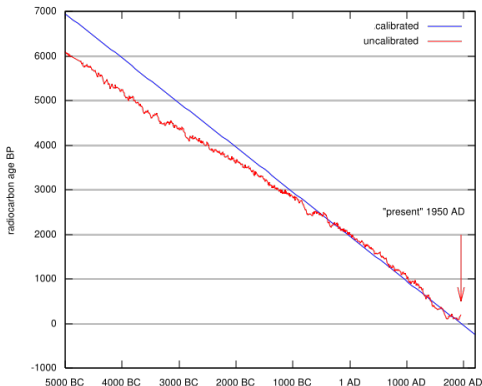
Uncalibrated (Libby) annum (ozn. *uncal*, *conv*) – jednostka czasu zdefiniowana jako czas potrzebny na taki spadek aktywności atomów izotopu ^{14}C jaki nastąpiłby w ciągu 1 roku kalendarzowego

dla początkowego udziału izotopu odpowiadającego jego udziałowi we **wzorcu** kwasu szczawiowego znakowanego izotopowo (NBS-OxII) i czasu połowicznego rozpadu wynoszącego **5568 lat**.

Definicja (Calibrated (Libby) annum)

Calibrated (Libby) annum (ozn. *cal*) – jednostka czasu zdefiniowana jako 1 rok kalendarzowy.

Czas radiowęglowy



Prezentacja dat [Before Present]

- np. 3459 uncal. BP
- np. 3459 cal. BP

Jednostka

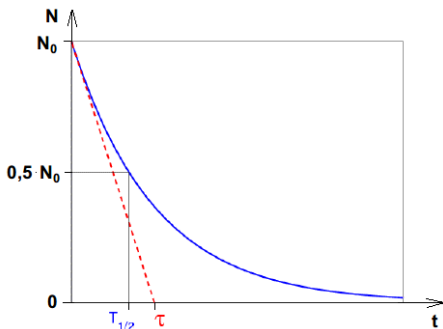
- 1a [annum]

Interpretacja

- 0 uncal. BP $\equiv$ 0 cal. BP $\equiv$ 1950 r. n.e. (AD)

Każdej dacie kalendarzowej **możemy przypisać jednoznacznie** daty w systemach **uncal. BP** oraz **cal. BP**.

Czas radiowęglowy



Rozpad wykładniczy

Prawo rozpadu promieniotwórczego

- $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$
- λ – stała rozpadu

Średni czas życia τ

- $\tau = \frac{1}{\lambda}$

Czas połowicznego rozpadu $T_{1/2}$

- $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$

Wiek radiowęglowy [uncal. BP]

- $\Delta t = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{N}{N_0} = -\tau \cdot \ln \frac{N}{N_0}$
- $\Delta t = -T_{1/2} \cdot \log_2 \frac{N}{N_0}$

Krzywe kalibracyjne

Cel:

Przeliczyć (**uncal. BP** → **cal. BP** → **lata kalendarzowe**).

- Inne metody datowania bezwzględnego
 - Dendrochronologia
 - Nacieki jaskiniowe
 - Warwochronologia
- Zasięg krzywych kalibracyjnych
 - *IntCal09* (50 000 BP)
 - (0 – 11 200) ± 5 cal. BP
 - (11 200 – 15 000) ± 10 cal. BP
 - (15 000 – 25 000) ± 20 cal. BP
 - (25 000 – 40 000) ± 50 cal. BP
 - (40 000 – 50 000) ± 100 cal. BP
 - Odchylenie standardowe rośnie wraz z wiekiem radiowęglowym
 - Inne standardy do 60 000 BP

Krzywe kalibracyjne

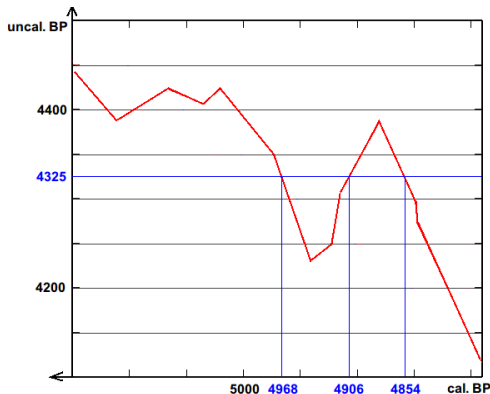
Cel:

Przeliczyć (**uncal. BP** → **cal. BP** → **lata kalendarzowe**).

- Obliczenie **roku kalendarzowego** na podstawie **cal. BP**

$$\text{rok}(x [\text{cal. BP}]) = \begin{cases} (1950 - x) \text{ n.e. (AD)} & \text{jeśli } x < 1950 \\ (x - 1949) \text{ p.n.e. (BC)} & \text{jeśli } x \geq 1950 \end{cases}$$

Krzywe kalibracyjne – niejednoznaczność



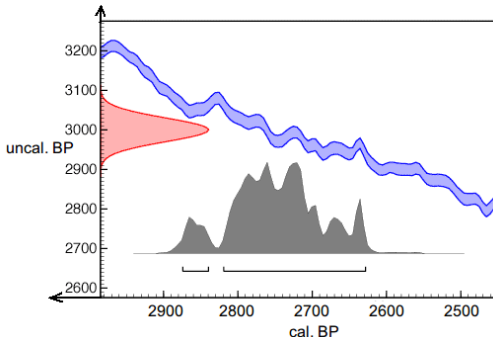
Niejednoznaczność krzywych kalibracyjnych:

- 1 Każdej dacie **cal. BP** można **jednoznacznie** przypisać **datę kalendarzową** i datę **uncal. BP**.
- 2 Istnieją daty **uncal. BP**, którym **nie można jednoznacznie** przypisać **daty kalendarzowej** ani daty **cal. BP**.

Istnieje funkcja ($decal : cal. BP \rightarrow uncal. BP$), ale nie ona jest różnowartościowa.

Zatem **pełna funkcja** ($uncal. BP \rightarrow cal. BP$) **nie istnieje**.

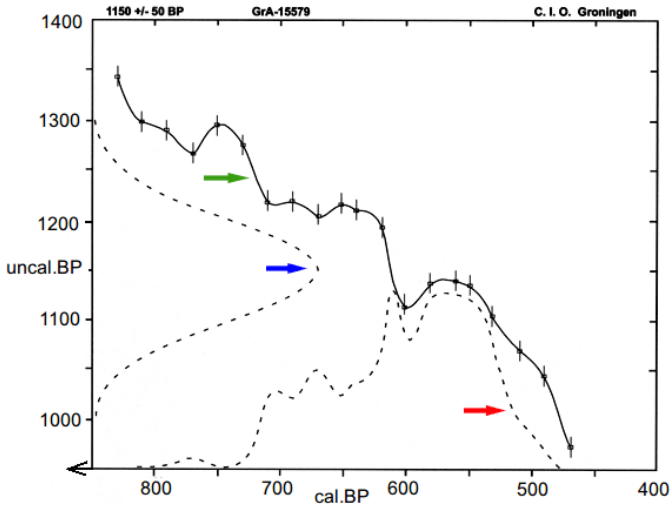
Odchylenia



Kalibracja daty
3000 $\pm$ 30 uncal. BP

- Dokładność datowania
 - Dokładność krzywej kalibracyjnej
- Wynik
- Złożony rozkład prawdopodobieństwa
 - Opis jako para:
 - **Rozkład uncal. BP**
 - **Krzywa kalibracyjna**
 - Przedziały ufności

Kalibracja



Rozkład uncal. BP
 1150 ± 50 uncal. BP

Krzywa kalibracyjna

Rozkład cal. BP

Datowanie radiowęglowe – wstęp teoretyczny

Dziękuję.

Bibliografia

- D. Lawecka, *Wstęp do archeologii*, Warszawa-Kraków 2003.
- J. Jakubowski, R. Sztencel, *Rachunek prawdopodobieństwa dla prawie każdego*, Warszawa 2006.
- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, Warszawa 2005.
- R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, *Feynmana wykłady z fizyki*, Warszawa 2007.
- J. Koronacki, J. Mielniczuk, *Statystyka dla studentów kierunków technicznych i przyrodniczych*, Warszawa 2001.
- M. Saifullah, G. Adi, A. David, *Radiocarbon dating and the Qur'anic manuscripts*, 2006.
[<http://www.islamic-awareness.org/Quran/Text/Mss/radio.html>].